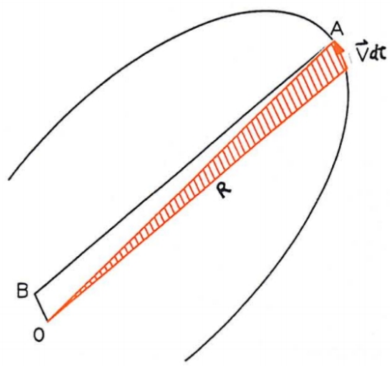
উপবৃত্তাকার কক্ষপথের জন্য কেপলারের তৃতীয় সূত্র প্রমাণ

কে. এম শারিয়াত উল্লাহ

শিক্ষার্থী, তড়িৎ ও ইলেকট্রনিক প্রকৌশল বিভাগ, শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়

কেপলার সৌরজগতের গ্রহ সম্বন্ধে তিনটি সূত্র প্রদান করেন। এর মধ্যে তৃতীয় সূত্র হচ্ছে: যেকোনো একটি গ্রহ তার নক্ষত্রের চারপাশে সম্পূর্ণ একবার ঘুরে আসতে যে পরিমাণ সময় নেয় তার বর্গ, গ্রহ থেকে নক্ষত্রের গড় দূরত্বের ঘনের সমানুপাতিক। অর্থাৎ, একটি গ্রহ নক্ষত্র থেকে r দূরত্বে অবস্থান করে যদি এটি সম্পূর্ণ কক্ষপথ T সময়ে পারি দেয় তবে $T^2 \propto r^3$ । আমরা উপবৃত্তের ধারণা ব্যবহার করে কেপলারের তৃতীয় সূত্র প্রমাণ করব।



ধরি, m ভরের একটি গ্রহ M ভরের সূর্যকে উপবৃত্তের একটি ফোকাসে রেখে ঘুরছে। এর রৈখিক বেগ $\vec{v}$ আর সূর্যের সাথে এর ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r}$। অতিক্ষুদ্র সময় dt পর এটি কক্ষপথের $\vec{v}dt$ অংশ অতিক্রম করবে। এই সময়ে $\vec{r}$ ব্যাসার্ধ ভেক্টর দ্বারা তৈরি করা অতিক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল হবে, [ভেক্টর পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল]

$$dA = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}dt \tag{1}$$

গ্রহটির কৌণিক ভরবেগ হবে,

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{2}$$

(1) ও (2) হতে পাই,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m} \tag{3}$$

এখানে যেহেতু মহাকর্ষ বল একটি কেন্দ্রাতিগ বল, তাই এর কৌণিক ভরবেগ $\vec{L}$ এর মান ধ্রুবক। তাই $\frac{L}{2m}$ ধ্রুবক। অর্থাৎ $\frac{dA}{dt}$ = ধ্রুবক **[যা কেপলারের দ্বিতীয় সুত্রের প্রমাণ]**

(2) এর উভয় পাশে সমাকলন করে,

তথ্যসূত্র: Noll, E. D. (1996). Kepler's Third Law for Elliptical Orbits. Physics Teacher, 34(1), 42-43.

$$A = \left(\frac{\vec{L}}{2m}\right)T \tag{4}$$

আবার উপবৃত্তের সম্পুর্ণ ক্ষেত্রফল

$$A = \pi ab \tag{5}$$

(যেখানে a হচ্ছে এর পরাক্ষ (Major Axix) ও b হচ্ছে উপাক্ষ (Minor Axix))

(4) ও (5) হতে আমরা লিখতে পারি,

$$T = \frac{2m\pi ab}{L} \tag{6}$$

গ্রহটি যখন সূর্যের খুব কাছাকাছি হয় তখন এর ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক বেগের দিক পরস্পর লম্ব হয়। তাই আমরা লিখতে পারি,

$$\mathrm{L} = \mathrm{m\,v_{min}} r_{min} \tag{7}$$

$$\text{বা, } \frac{L^2}{2} = \left(\frac{1}{2}m\, v_{min}^2\right) m\, r_{min}^2 \tag{8}$$

এখানে, $\left(\frac{1}{2}m\, v_{min}^2\right)$ হচ্ছে গ্রহের গতিশক্তি। তাই,

$$EK_{min} = \frac{L^2}{2mr_{min}^2} \tag{9}$$

কিন্তু সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ উভয় জায়গায় গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে। তাই,

$$\frac{L^2}{2mr_{min}^2} - \frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{r_{min}}} = \frac{L^2}{2mr_{max}^2} - \frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{r_{max}}} \tag{10}$$

$$\text{বা, } \frac{L^2}{2m}\,(r_{min} + r_{max}) = GMm(r_{min} \times r_{max}) \tag{11}$$

যেহেতু, $r_{min} + r_{max} = 2a$ তাই,

$$\mathrm{L}^2 = \frac{\mathrm{GMm}^2}{\mathrm{a}}\,(r_{min} \times r_{max}) \tag{12}$$

e যদি উপবৃত্তের উতকেন্দ্রিকতা হয় তবে $r_{min} = a(1-e)$ এবং $r_{max} = a(1+e)$ তাহলে

$r_{min} \times r_{max} = a^2\,(1-e^2) = b^2$ তাহলে (12) হতে পাই,

$$\mathrm{L}^2 = \frac{\mathrm{GMm}^2}{\mathrm{a}}\mathrm{b}^2 \tag{13}$$

(13) ও (6) নং সমীকরণ মিলিয়ে পাই, $\boldsymbol{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3}$ এটিই কেপলারের তৃতীয় সূত্র। ■

তথ্যসূত্র: Noll, E. D. (1996). Kepler's Third Law for Elliptical Orbits. Physics Teacher, 34(1), 42-43.