নির্দিষ্ট ব্যবধিতে নিরবচ্ছিন্ন কোনো ফাংশনের গড় মান

মোঃ সিফাত হাসান

ধরুন, আপনার কাছে 5 টি সংখ্যা আছে $\longrightarrow$ 7 3 5 9 1 এদের গড় কত? খুবই *Easy*! 5. কীভাবে?

$$(7+3+5+9+1)/5 \;=\; 25/5 \;=\; 5$$

ব্যাপারটাকে একটু অন্যভাবে দেখা যাক! ধরুন $\rightarrow$ $f(x) = y$ $\quad (\,x \;=\; [1,5]$ এবং $y = \{7,3,5,9,1\}\,)$

এই *Function* এর ক্ষেত্রে $\Delta x = 1$, কারণ x এর মান এক এক করে বাড়ছে!

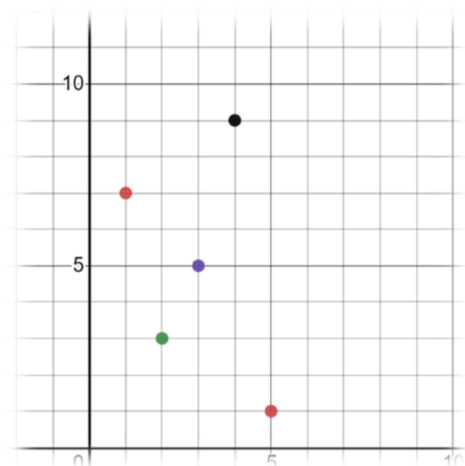
$f(1) = 7\,,\quad f(2) = 3\,,\quad f(3) = 5\,,\quad f(4) = 9\,,\quad f(5) = 1$

$$\text{গড়} \;=\; \sum_{x=1}^{x=5} f(x)\left(\frac{\Delta x}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{x=1}^{x=5} f(x)\,\Delta x$$

$$= \frac{1}{5}\,[\,f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)\,]$$

$$= \frac{1}{5}\,(7+3+5+9+1) \;=\; \frac{25}{5} \;=\; 5$$



এখন ধরুন, $[a,b]$ ব্যবধিতে একটি *Continuous Function* , উদাহরণস্বরূপ $\longrightarrow$ $f(x) = x^2$; এসব ফাংশনের ক্ষেত্রে $x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত সবগুলো মানের গড় কীভাবে বের করা যায় !? (এই প্রশ্নের উত্তর দেওয়ার জন্যই আগের এতোগুলো কথা বলা !!!)

So, Lets Get Started !!!

যেকোনো ফাংশনের গড় মান $=$ ($x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত সবগুলো মানের নিরবচ্ছিন্ন সমষ্টি) / (ব্যবধির উর্ধ্বসীমা – ব্যবধির নিম্নসীমা)

[ধরি, $x = a$ থেকে b পর্যন্ত x এর মান Δx করে বাড়ছে]

তাহলে,

$$\text{গড়} \;=\; \sum_{x=a}^{x=b} f(x)\left(\frac{\Delta x}{b-a}\right) \;=\; \frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{x=b} f(x)\,\Delta x$$

কিন্তু, যদি x এর মান বৃদ্ধির পরিমাণটা খুবই ক্ষুদ্র হয়, অর্থাৎ যদি Δx এর মান 0 এর কাছাকাছি চলে যায় (*limit of* $\Delta x \rightarrow 0$); তাহলে, আমরা Δx এর পরিবর্তে dx এবং $\sum$ (*Summation*) এর পরিবর্তে $\int$ (*Integration*) এর সাহায্য নিতে পারি।

$$[a,b] \text{ ব্যবধিতে } f(x) \text{ এর গড়} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{x=b} f(x)\,\Delta x \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\textit{So, on an interval } [a,b]\,,\ \textit{average value of } \ f(x) \;=\; \bar{f} \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Example

ধরুন, $f = f(x) = x^2$; আমাদের $x = [0,5]$ ব্যবধিতে $\bar{f}$ $(Average\ of\ f)$ বের করতে হবে। সরাসরি *Solve* করে ফেলতে পারি!

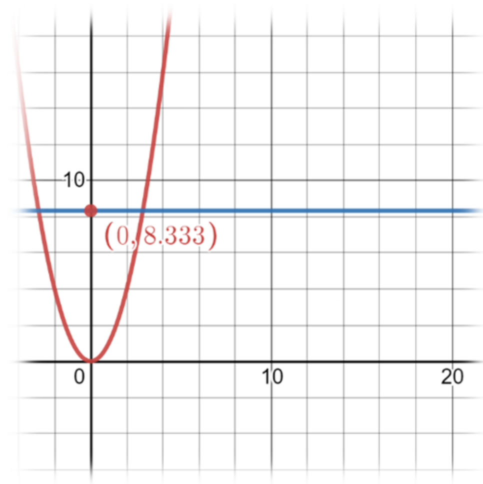
$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5-0}\int_0^5 x^2\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{1}{15}[x^3]_0^5$$

$$= \frac{1}{15}\times[5^3 - 0^3] = \frac{1}{15}\times 5^3 = \frac{125}{15}$$

$$= \frac{25}{3}$$

$$= 8.333\ldots\ldots\ldots$$



সবই ঠিক আছে, কিন্তু এটা বাস্তবে কখন ব্যবহার করবো ?

↓ এর একটি ভালো উদাহরণ হতে পারে ↓

❖ অনেক উঁচু থেকে কোনো স্থির বস্তুকে ছেঁড়ে দিলেন। এখন সেটা ভূমি স্পর্শ করতে কত সময় লাগবে তা হিসাব করতে চান। কী করবেন? $h = \frac{1}{2}gt^2$ সূত্রটি ব্যবহার করে সময় t বের করবেন, *Right*? *Wrong*! এভাবে হবে না, কারণ সূত্রে g এর মান ভূমিতে কত সেটা। অনেক উঁচুতে কি মান একই থাকবে? মোটেই না! উঁচু থেকে ভূমির দিকে মান ধীরে ধীরে বাড়বে। তাই, আমরা যদি h উচ্চতা থেকে ভূমি $(h = 0)$ পর্যন্ত g এর মানের গড় $\overline{g_h}$ (সাংখ্যিক মান) হিসাব করতে পারি তাহলে ঐ সমীকরণে শুধু g এর পরিবর্তে $\overline{g_h}$ বসিয়ে দিলেই কাজ শেষ !!! বাকি কাজ তো "জলবৎ তরলং" !!!

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$g(h) = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2}\times\frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{gR^2}{(R+h)^2}$$

$$\overline{g_h} = \frac{1}{0-h}\int_h^0 g(h)\,dh$$

$$= -\frac{1}{h}\int_h^0 \frac{gR^2}{(R+h)^2}\,dh = -\frac{gR^2}{h}\int_h^0 \frac{1}{(R+h)^2}\,dh = -\frac{gR^2}{h}\times\left[-\frac{1}{R+h}\right]_h^0 = \frac{gR^2}{h}\times\left[\frac{1}{R+h}\right]_h^0 = \frac{gR^2}{h}\times\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right]$$

$$= \frac{gR^2}{h}\times\frac{(R+h)-R}{R(R+h)} = \frac{gR}{h}\times\frac{h}{R+h} = g\frac{R}{(R+h)}$$